مسائل وتمارين الفصل الأول

١) لدينا النقاط $C(3.-1)$, $B(2,2)$, $A(1,1)$ ، فإذا فرضنا أن هذه النقاط تشكل ثلاثة رؤوس متتالية في متوازي اضلاع فما هما احداثيا الرأس الرابع .

٢) أوجد جيوب تمام الزوايا التي يصنعها المتجه $\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ مع المحاور الاحداثية .

٣) أوجد مركبات المتجه $\vec{A}$ الواقع في مستو إذا علمت أن طوله **5** واتجاهه معرف بالزاوية $\theta = 150°$.

٤) بفرض $\vec{A} = (2,-1,-2)$ أوجد متجه الوحدة المعاكس للمتجه $\vec{A}$ بالاتجاه.

٥) أوجد قيمة الثابت a ليتعامد المتجهان:

$$\vec{B} = 2a\vec{i} + a\vec{j} + 4\vec{k} \quad , \quad \vec{A} = a\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

٦) أوجد جيوب تمام توجيه الخط الواصل بين النقطتين $(2,2,-4)$, $(1,-1,2)$

٧) بفرض $\vec{B} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ أوجد:

$$|\vec{A} - \vec{B}| \; , \; |\vec{A} + \vec{B}| \; , \; -3\vec{A} + 2\vec{B} \quad , \quad 2\vec{A} + \vec{B}$$

$$(2\vec{A} + \vec{B})(2\vec{A} - \vec{B}) \quad , \quad |\vec{A}| + |\vec{B}|$$

٨) إذا كان: $\vec{C} = 8\vec{i} - 19\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{A} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$

أوجد العددين n , m بحيث يكون $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$.

٩) أثبت أن متوازي الأضلاع المعطى ضلعيه بالمتجهين:

$$\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k} \quad , \quad \vec{A} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

هو معين، احسب طول ضلعه وقياس زواياه ومساحته.

١٠) أوجد مسقط المتجه $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ على المتجه $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

١١) إذا كان :

$$\vec{A}(2,-1,1) \; , \vec{B}(0,1,3) \; , \vec{C}(-2,1,6)$$

أوجد المتجه $\vec{D}$ العمودي على كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويحقق $\vec{C}.\vec{D}=1$.

١٢) بفرض $\vec{A}$متجه ثابت و $\vec{B}$ متجه طوله ثابت ومتغير بالاتجاه أوجد القيمة العظمى والصغرى للمقدار $\left|\vec{A}-\vec{B}\right|$.

١٣) أوجد المسقط العمودي لـ $\left|\vec{A}\right|$ على طول المتجه $\vec{B}$ وأوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ حيث :

$$i)\quad \vec{A}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}\quad,\quad \vec{B}=-\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$$
$$ii)\quad \vec{A}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}\quad,\quad \vec{B}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$$

١٤) بفرض $\vec{A}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}\quad,\quad \vec{B}=2\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$ والمطلوب أوجد قيمة العدد الحقيقي m بحيث $m\vec{A}+\vec{B}$ عمودي على :

أ) $\vec{A}$ ب) $\vec{B}$

١٥) بفرض

$$\vec{C}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\quad,\quad \vec{B}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\quad,\quad \vec{A}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$$

أوجد جميع متجهات الوحدة التي تكتب بدلالة كلاً من $\vec{B},\vec{A}$ وتعامد المتجه $\vec{C}$.

١٦) بفرض $\vec{A}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}\quad,\quad \vec{B}=\cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}$ استناداً إلى الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{B},\vec{A}$ استنتج صحة المطابقة:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

١٧) أثبت صحة المتراجحة $\left|\vec{A}.\vec{B}\right|\le\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|$

١٨) أثبت صحة متباينة المثلث $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|\le\left|\vec{A}\right|+\left|\vec{B}\right|$ ثم استنتج أن :

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|\ge\left|\vec{A}\right|-\left|\vec{B}\right|$$

١٩) أثبت أن:

أ) $|\vec{A}+\vec{B}|^2+|\vec{A}-\vec{B}|^2=2|\vec{A}|^2+2|\vec{B}|^2$

ب) $|\vec{A}+\vec{B}|^2-|\vec{A}-\vec{B}|^2=4\vec{A}\vec{B}$

٢٠) أثبت أن الشرط اللازم والكافي لتعامد المتجهين $\vec{B},\vec{A}$ هو أن :

$$|\vec{A}+\vec{B}|=|\vec{A}-\vec{B}|$$

ما هو المعنى الهندسي لتحقق ذلك.

٢١) بفرض $\vec{B},\vec{A}$ متجهان و $m=|\vec{A}|$, $n=|\vec{B}|$:

أ) أثبت أن المتجهين $n\vec{A}+m\vec{B}$, $n\vec{A}-m\vec{B}$ متعامدان.

ب) بفرض أن المتجه $\vec{C}=\dfrac{n\vec{A}+m\vec{B}}{m+n}$ أثبت أن الزاوية بين $\vec{C},\vec{A}$ تطابق الزاوية بين $\vec{C},\vec{B}$.

٢٢) أثبت بطريقتين مختلفتين أن المتجهين $\vec{A}$, $\vec{B}$ متوازيان:

$\vec{A}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$

٢٣) أوجد متجه الوحدة العمودي على كل من المتجهين:

$\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$

٢٤) بفرض: $\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{B}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$

أوجد المتجهات:

a) $\vec{A}\times\vec{B}$ ، b) $\vec{B}\times\vec{C}$ ، c) $\vec{A}\times\vec{B}.\vec{C}$ ، d) $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$

e) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، f) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ ، g) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})$

h) $(\vec{A}+2\vec{B})\times(2\vec{A}-\vec{B})$

قارن النتائج بين :

أ) $\vec{A}.\vec{B}\times\vec{C}$ ، $\vec{A}\times\vec{B}.\vec{C}$

ب) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

٢٥) بفرض: $\vec{A}=3\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$

أوجد:

a) $\vec{A}\times\vec{B}$ ، b) $\vec{B}\times\vec{C}$ ، c) $(\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-\vec{B})$

d) $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، e) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

ثم اكتب ناتج الأخير بدلالة كلاً من $\vec{C},\vec{B}$

٢٦) مستخدماً خواص الضرب المتجهي أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه:

$i)\quad P(1,0,3)\;;\;Q(1,2,-1)\;;\;R(-2,1,3)$

$ii)\quad P(3,-1,2)\;;\;Q(1,-1,-3)\;;\;R(4,-8,1)$

٢٧) بفرض $\vec{A}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ والمطلوب :

أ) أوجد المتجه $\vec{B}$ الذي يحقق : $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$، هل $\vec{B}$ هو المتجه الوحيد الذي يحقق ذلك؟

ب) أوجد المتجه $\vec{B}$ الذي يحقق : $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$, $\vec{A}.\vec{B}=1$، هل $\vec{B}$ هو المتجه الوحيد الذي يحقق العلاقتين الأخيرتين؟

٢٨) أوجد الثابت a بحيث يقع المتجهان $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $3\vec{i}+a\vec{j}+5\vec{k}$ في مستو واحد.

٢٩) أوجد المعادلات الوسيطية والمعادلات الأساسية للخط المستقيم المار من النقطة *(-1,3,2)* ويوازي المتجه $\vec{A}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$.

٣٠) أوجد المعادلات الأساسية للخط المستقيم المار من النقطتين $(-2,3,5),(3,-1,4)$.

٣١) أوجد المعادلات الوسيطية للخط المار من النقطة *(1,-2,1)* والعمودي على الخط $2x-3y+4z=5$

٣٢) أوجد نقطة تقاطع الخطين المعرفين بالمعادلتين:

$$\vec{R}_1=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})t$$
$$\vec{R}_2=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}+(\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})t$$

ثم أوجد الزاوية بين الخطين.

٣٣) أوجد معادلة المستوي المار من النقطة (-2,3,1) ، والذي يحوي الخط:

$$\vec{R}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}+(3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})t$$

٣٤) أوجد معادلة المستوي المار من النقط الثلاث $(1,-1,1)\,,(-2,3,4)\,,(-3,-2,1)$

٣٥) أوجد معادلات المستوي المار من النقطة (-1,2,3) والعمودي على الخط المعرف بتقاطع المستويين:

$$3x-2y+5z-2=0\ ,\ x+2y-3z+4=0$$

٣٦) أوجد بعد النقطة (2,-2,3) عن الخط:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{+2}=\frac{z-1}{-3}$$

٣٧) أوجد المسافة من نقطة الأصل إلى:

أ) الخط $\vec{R}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}+(3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})t$

ب) المستوي $3x-2y+5z-2=0$

٣٨) أوجد الجداء المختلط للمتجهات:

أ) $\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{B}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\ ,\ \vec{C}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

ب) $\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\ ,\ \vec{B}=-3\vec{i}+2\vec{k}\ ,\ \vec{C}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$

٣٩) أوجد حجم متوازي السطوح المنشأ على المتجهات :

$$\vec{A}=5\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+3\vec{k}\ ,\vec{B}=2\vec{\imath}+6\vec{k}\ ,\vec{C}=3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$$

٤٠) أثبت أن المتجهات:

$\vec{C}=-4\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$

مرتبطة خطياً، ثم اكتب أحد المتجهات بدلالة المتجهين الآخرين.

٤١) أثبت أن المتجهات $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{B}=\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}+\vec{k}$ مستقلة خطياً ،ثم عبّر عن المتجه $\vec{D}=4\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ بدلالة هذه المتجهات.

٤٢) بفرض $\vec{A}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{B}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

أوجد بطريقتين:

أ) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ، ب) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

٤٣) أثبت أن:

أ) $(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{C}\times\vec{D})+(\vec{B}\times\vec{C}).(\vec{A}\times\vec{D})+(\vec{C}\times\vec{A}).(\vec{B}\times\vec{D})=0$

ب) $\vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{A}\times\vec{C})=(\vec{A}\vec{B}\vec{C})(\vec{A}.\vec{D})$

٤٤) أثبت أن $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})=0$.

مسائل وتمارين الفصل الثاني

١) إذا كان :

$\vec{C}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{B}=\cos t\vec{i}-\sin t\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{A}=\sin t\vec{i}+\cos t\vec{j}+t\vec{k}$

أوجد: أ) $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right)$

ب) $\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ وذلك في النقطة الموافقة للقيمة $t=o$.

٢) إذا كان : $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}=6t\vec{i}-24t^2\vec{j}+4\sin t\vec{k}$ أوجد المتجه $\vec{A}$.

٣) إذا كان : $\vec{B}=(2t-3)\vec{i}-t\vec{k}$, $\vec{A}=t^2\vec{i}-t\vec{j}+(2t+1)\vec{k}$ أوجد :

a)- $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$ ، b)- $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$ ، c)- $\frac{d}{dt}\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$ ،

d)- $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}\right)$.

٤) أوجد السرعة والتسارع لجسيم يتحرك على طول المنحني :

$x=2\sin 3t\ ,\ y=2\cos t\ ,\ z=8t$

ثم أوجد مقدار السرعة والتسارع له.

٥) ليكن الحقل المتجهي $\vec{F}=\vec{A}\sin y\vec{i}+\vec{B}\cos x\vec{j}$ ، حيث إنَّ :

$\vec{B}=\vec{i}-\vec{j}\ ,\ \vec{A}=\vec{i}+\vec{j}$

أوجد: $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4})}\vec{F}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})}\left|\vec{F}(x,y)\right|$

٦) ليكن : $\vec{G}=e^x\cos y\vec{i}+e^x\sin y\vec{j}$, $\vec{F}=\sin x\vec{i}+\ln z\vec{k}$

أوجد $\vec{F}\times\vec{G}$, $\vec{F}.\vec{G}$, $\vec{F}+\vec{G}$.

٧) بفرض: $\vec{G}=\cos z\vec{i}+e^x\sin z\vec{j}-e^{-2x}\vec{k}$, $\vec{F}=e^x\cos z\vec{i}+e^x\sin z\vec{j}+\vec{k}$

أ) أثبت أن $\vec{G}, \vec{F}$ متعامدان لكل نقطة (x, y, z) من R^3 .

ب) أثبت أن الحقل المتجهي $\vec{F}\times\vec{G}$ موازٍ للمستوي xoy .

٨) إذا كان $\phi = 3x^2 - yz$, $\vec{A} = 3xyz^2\vec{i} + 2xy\vec{j} - x^2yz\vec{k}$

أوجد : $\vec{A}.\vec{\nabla}$ ، $\vec{\nabla}.(\phi\vec{A})$ ، $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\phi)$ عند النقطة $(1,-1,1)$.

٩) إذا كان $\phi = 2z + x^3y$, $\vec{A} = 2x^2\vec{i} - 3yz\vec{j} + xz^2\vec{k}$

أوجد : $\vec{A}.\vec{\nabla}\phi$ ، $\vec{A}\times\vec{\nabla}\phi$ عند النقطة $(1,-1,1)$.

١٠) إذا كانت $G = 2z^2y - xy^2$, $F = x^2z + e^{\frac{y}{x}}$

أوجد $\vec{\nabla}(F+G)$, $\vec{\nabla}(F.G)$ عند النقطة $(1,0,-2)$.

١١) إذا كانت F دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ t ، x,y,z ، حيث x, y, z دوال قابلة للاشتقاق في t، أثبت أن:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\nabla}F.\frac{d\vec{r}}{dt}$$

حيث $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ متجه الموضع لأي نقطة.

١٢) أوجد المشتق الموجه للكمية $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ عند النقطة $(2,-1,2)$ في اتجاه المتجه $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

١٣) في أي اتجاه من النقطة $(1,3,2)$ يكون المشتق الموجه للكمية $\phi = 4xz - y^2$ أكبر ما يمكن، ما هي قيمة أكبر كمية؟

١٤) أوجد المشتق الموجه للحقل السلمي $f(x,y,z) = x^2 + yz + z^2$ في النقطة$(-2,2,1)$باتجاه الناظم الخارجي للكرة: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

١٥) بفرض أن $f(x,y,z) = (\vec{R}\times\vec{A}).(\vec{R}\times\vec{B})$ حيث $\vec{B}, \vec{A}$ متجهان ثابتان، أثبت أن $\vec{\nabla}f = \vec{B}\times(\vec{R}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{R}\times\vec{B})$

١٦) أوجد $\vec{\nabla}\,\vec{F}$ لكل من الحقول المتجهية التالية :

$\vec{F}(x,y,z)=e^{x}\left(\cos y\vec{i}+\sin y\vec{j}\right)$ -(a

$\vec{F}(x,y,z)=xe^{z}\vec{i}+ye^{x}\vec{j}+ze^{y}\vec{k}$ -(b

$\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{\frac{1}{2}}}$ -(c

١٧) أوجد القيمة الصغرى للمشتق الموجه لكل من الحقول السلمية في النقطة المعطاة بجانب كل حقل :

أ) $f(x,y)=x^{2}y+(x-y)^{2}$ في $(1,1)$.

ب) $\ln\left(x^{2}+2y^{2}\right)$ في $(-1,1)$.

١٨) أوجد التدرج لكل من الحقول السلمية الآتية في النقطة المعطاة بجانب كل حقل :

أ) $f(x,y)=x^{2}\cos y+y$ في $(1,0)$.

ب) $f(x,y,z)=xye^{x}+y\ln z$ في $(-1,-1,1)$.

١٩) احسب $div\left(2x^{2}z\vec{i}-xy^{2}\vec{j}+3yz^{2}\vec{k}\right)$.

٢٠) إذا كان $\vec{F}=\left(3x^{2}y-z\right)\vec{i}+\left(xz^{3}+y^{4}\right)\vec{j}-2x^{3}z^{2}\vec{k}$

أوجد $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{F})$ عند النقطة $(2,-1,0)$.

٢١) إذا كان $\phi=x^{2}yz$, $\vec{A}=2xz^{2}\vec{i}-yz\vec{j}+3xz^{3}\vec{k}$ أوجد :

$\vec{\nabla}\vec{A}$ ، $rot(\phi\vec{A})$ ، $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ ، $\vec{\nabla}.\left[\vec{A}.rot\,\vec{A}\right]$ عند $(1,1,1)$.

٢٢) أوجد قيمة الثابت a بحيث يكون دوران الحقل المتجهي:

$\vec{A}=\left(axy-z^{3}\right)\vec{i}+\left(a-2\right)x^{2}\vec{j}+\left(1-a\right)xz^{2}\vec{k}$ معدوماً.

٢٣) إذا كان $G=xy-3z^{2}$, $F=x^{2}yz$ أوجد:

$\vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}F).(\vec{\nabla}G)\right]$ ، $\vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}\boldsymbol{F})\times(\vec{\nabla}\boldsymbol{G})\right]$ ، $\vec{\nabla}\times\left[(\vec{\nabla}\boldsymbol{F})\times(\vec{\nabla}\boldsymbol{G})\right]$

٢٤) بفرض $\vec{V} = x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k}$ أثبت أن $div\,\vec{V} = 0$ لكل (x, y, z)

وأوجد الحقل $\vec{F}$ بحيث $rot\,\vec{F} = \vec{V}$.

٢٥) إذا كان:

$$\phi = 2x^2 + yz \quad , \quad \vec{A} = x^2 z\vec{i} + yz^3\vec{j} - 3xy\vec{k} \quad , \quad \vec{B} = y^2\vec{i} - yz\vec{j} + 2x\vec{k}$$

والمطلوب :

أ) أوجد: $(\nabla\vec{A})\vec{B}$ ، $\vec{A}.(\vec{\nabla}\phi)$ ، $\vec{A}.(\vec{\nabla}\phi)$ ، $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ ، $\vec{\nabla}.\left[\vec{A}.rot\,\vec{A}\right]$ ،

$\vec{A} + (\vec{\nabla}\phi)$ ، $(\vec{A}\times\vec{\nabla})\phi$ ، $(\vec{\nabla}\times\vec{A})\times\vec{B}$ ، $\vec{B}.\vec{\nabla}\times\vec{A}$

ب) أثبت أن :

a-) $\vec{\nabla}.(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}.(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

b-) $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla}.\vec{B})$

c-) $\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

٢٦) بفرض $\vec{H}, \vec{G}, \vec{F}$ حقول متجهة، أوجد:

$\vec{\nabla}.(\vec{F}.\vec{G}\times\vec{H})$ ، $\vec{\nabla}.\left[\vec{F}\times(\vec{G}\times\vec{H})\right]$ ، $\vec{\nabla}\times\left[\vec{F}\times(\vec{G}\times\vec{H})\right]$

٢٧) بفرض أن علاقات التحويل الإحداثي من الإحداثيات u, v, z على الاسطوانة الناقصية إلى الإحداثيات الديكارتية موضحة بالعلاقات:

$$x = \frac{(u^2 - v^2)}{2} \quad , \quad y = uv \quad , \quad z = z \qquad ; \ (-\infty \le u \le +\infty \ , \ v \ge 0)$$

والمطلوب:

أ) حدد المنحنيات على المستوي $z = 0$ الموافقة لـ $u = const$.

ب) أوجد المنحنيات الموافقة لـ $u = 0$, $v = 0$ ، $u = v$, $u = -v$.

مسائل وتمارين الفصل الرابع

١) أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنيين :

$$2x^2 + y^2 = 20$$
$$4y^2 - x^2 = 8$$

٢) إذا كان :

$$x = a\cos^3\theta \quad , \quad y = a\sin^3\theta$$

أوجد $\vec{T}$ و $\vec{N}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

٣) احسب التقوس لـ :

أ- المنحني المعطى بالمعادلات :

$$x = a(1 - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \quad ; \quad a \neq 0$$

في نقطة ما منه .

ب- حلزون أرخميدس المعطى بالمعادلة :

$$\vec{r} = a\theta \quad ; \quad a > 0$$

٤) احسب التفاف اللولب الدائري المعطى بالمعادلة :

$$\vec{r} = (a\cos t)\vec{e}_1 + (a\sin t)\vec{e}_2 + (bt)\vec{e}_3$$

حيث $a > 0\,, b \neq 0$.

٥) أوجد معادلات فرينيه للمنحني :

$$\vec{r}(t) = (1 - \cos t\ , \sin t\ , t)$$

٦) أوجد التقوس و الالتفاف في أي نقطة من المنحني :

$$\vec{r}(t) = (2t\ , \ln t\ , t^2)$$

٧) أوجد الميل لكل من المنحنيات التالية :

أ- $\vec{r} = 2 + \sin\theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{6}$.

ب- $\vec{r} = sin^3(\theta/3)$ عند $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ت- $\vec{r} = \cos 3\theta$ عند القطب .

٨) اكتب معادلة المنحني $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ بدلالة الوسيط τ حيث أن $\tau = 1 - t^2$.

٩) اكتب معادلة المنحني $\vec{r}(t) = e^t\left(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}\right)$ ، بدلالة الوسيط $\tau = e^t$.

١٠) أثبت أن المنحني $\vec{r}(t) = a(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}) + a(1 + \sin t)\vec{k}$ هو منحن مستو.

١١) اكتب معادلة كل منحن من المنحنيات الآتية بدلالة طول قوسه:

i) $\vec{r}(t) = t\left(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \vec{k}\right) \quad ; \quad t \geq 0$

ii) $\vec{r}(t) = \left(\sin t - \cos t\right)\vec{i} + \left(\cos t + t\sin t\right)\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k} \quad ; \quad t \geq 0$

١٢) أوجد النقاط الشاذة للمنحنيات:

1) $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$

2) $x^2 + y^2 - xy = 0$

3) $y^3 - x^3 + (x + y)^2 = 0$

4) $x = \frac{1+t}{t} \quad , \quad y = \frac{t}{t-1}$

١٣) عين نوع نقاط تراجع المنحنيين:

i) $x = t^2 \quad , \quad y = t^3$

ii) $x = t^3 + t^2 \quad , \quad y = t^2$

١٤) أثبت أن التمثيل للمنحني المعرف بالمعادلة :

$x = t \ , \ y = t^2 + 1 \ , \ z = t^3 + t$

هو تمثيل نظامي.

١٥) أوجد المستقيم المماس والناظم الأساسي وثنائي الناظم والتقوس للمنحنيات المعرفة بالمعادلات:

i) $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (1+t)\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$; $t \geq 0$

ii) $\vec{r}(t) = \cosh t\vec{i} + \sinh t\vec{j} + t$; $t \geq 0$

١٦) ليكن المنحني المعرف بالمعادلة:

$$x = t - \sin t \ , \ y = 1 - \cos t \ , \ z = a\sin\frac{t}{2}$$

والمطلوب:

أ) أوجد طول قوس المنحني بين النقطتين الموافقتين لقيمتي الوسيط $t_2 = 2\pi \ , \ t_1 = \pi$.

ب) أوجد قاعدة تريدر $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$.

ج) احسب نصف قطر تقوس والتفاف المنحني.

د) اكتب معادلات المماس والناظم الأساسي وثنائي الناظم والمستوي الناظم والمستوي الملاصق.

١٧) أوجد تقوس والتفاف كل من المنحنيات:

1) $x = e^t \ , \ y = e^{-t} \ , \ z = \sqrt{2}t$

2) $x = t \ , \ y = \dfrac{1+t}{t} \ , \ z = \dfrac{1-t^2}{t^2}$

3) $x = a(3t - t^3) \ , \ y = 3at^2 \ , \ z = a(3u + u^3)$

١٨) أوجد معادلة المستوي المماس للمنحني المعرف بالمعادلة :

أ) $\vec{r}(t) = e^t\cos t\vec{i} + e^t\sin t\vec{j} + e^t\vec{k}$ في النقطة الموافقة لـ $t = \dfrac{\pi}{4}$.

ب) $\vec{r}(t) = t\cos t\vec{i} + t\sin t\vec{j} + t\vec{k}$ في النقطة الموافقة لـ $t = \pi$.

١٩) أوجد التفاف المنحني المعرف بالمعادلة:

$i)\quad \vec{r}(t)=t\vec{i}+at^2\vec{j}+(2/3)a^2t^3\vec{k}$

$ii)\quad \vec{r}(t)=t\vec{i}+(1+\frac{1}{t})\vec{j}+(\frac{1}{t}-t)\vec{k} \quad ; \quad t\geq 0$

٢٠) أوجد معادلات فرينيه للمنحني المعرف بالمعادلة:

i) $\vec{r}(t)=\left(\sin t-t\cos t\right)\vec{i}+\left(\cos t+t\sin t\right)\vec{j}+\frac{t^2}{2}\vec{k} \quad ; \; t\geq 0$

ii) $\vec{r}(t)=\sin t\,\vec{i}+t\,\vec{j}+(1-\cos t)\vec{k} \quad ; \; t\geq 0$

٢١) أوجد نصف قطر تقوس المنحنيات التالية وإحداثيات مركز تقوسها وناشر ومنشور كل منها:

i) $x=\cos^3 t \quad , \quad y=\sin^3 t$

ii) $x=a\left(\cos t+t\sin t\right) \quad , \quad y=a\left(\sin t-t\cos t\right)$

٢٢) أوجد المعادلات الذاتية للمنحني المعرف بـ :

1) $\vec{r}(t)=\left(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t\right)$

2) $\vec{r}(t)=\left(a\,cht,a\,sht,at\right)$

3) $\vec{r}(s)=\frac{1}{2}\left(\cos^{-1}(s)-s\sqrt{1-s^2},1-s^2,0\right)$

٢٣) أوجد مغلف المنحنيات :

أ) $(x-t)^2-y^2-ty=0$ ، حيث t هو وسيط متغير.

ب) $y^2-(x-\lambda)(x-2\lambda)^2=0$ ، حيث λ هو الوسيط.

ج) $x^2+y^2-2\left(2+\lambda^2\right)x-2\lambda y=0$ حيث λ هو الوسيط.

مسائل وتمارين الفصل الخامس

١) بين أن السطحين :

$$F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$$

متماسين عند النقطة $(2,1,1)$.

٢) بين أن السطحين :

$$F(x,y,z) = xy + yz - 4zx = 0$$

$$G(x,y,z) = 3z^2 - 5x + y = 0$$

يتقاطعان بزاوية قائمة عند النقطة $(1,2,1)$.

٣) استنتج المعادلات التي تعطي المستوي المماس و المستقيم العمودي للسطح $F(x,y,z) = 0$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

٤) أوجد المعادلات الوسيطية والصيغة التربيعية الأولى لكل سطح من السطوح الآتية:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

٥) أوجد الصيغة التربيعية الثانية للسطح :

$$x = u\cos v \ , \ y = u\sin v \ , \ z = u$$

ثم أوجد منحنيات التقوس على السطح المعطى .

٦) أوجد متجه وحدة الناظم ومعادلة المستوي المماس والمستقيم الناظم على كل سطح من السطوح الآتية في النقطة المعطاة بجانب كل سطح:

i) $\vec{R}(u,v) = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u^2\vec{k} \quad ; \quad (1,-1,2)$

ii) $\vec{R}(u,v) = \sqrt{2}(\sin u\cos v)\vec{i} + 2\sqrt{2}(\sin u\sin v)\vec{j} + (\sqrt{3}\cos u)\vec{k} \, ; (\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$

٧) بين أن مربع عنصر طول قوس في الإحداثيات المنحنية يعطى بالمعادلة :

$$ds^2 = \sum_{P=1}^{3}\sum_{q=1}^{3} g_{pq}du_p du_q$$

٨) أوجد طول قوس المنحني المعطى بالمعادلة :

$i)\quad 0 \le t \le \pi \ , \quad u = t \ , \ v = e^{t\frac{\cot b}{\sqrt{2}}}$

على المخروط $\vec{R}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$

$ii)\quad v = \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \frac{1}{\sin\tau} \ , \ u = t \ ; \ (\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2})$

على الكرة $\vec{R}(u,v) = (\sin u\cos v)\vec{i} + (\sin u\sin v)\vec{j} + \cos u\vec{k}$

٩) أوجد التقوس الكلي والوسطي في النقطة $(u = 1, v = 1)$ من السطح :

$$x = u + v \, , y = u - v \, , z = uv$$

١٠) أثبت أن خطوط الطول والعرض (المنحنيات الإحداثية للطارة) في نقطة منها هي دوائر متعامدة.

١١) بين أن صورة المنحني: $u = 2arctg\, t$, $v = \log t$, $t > 0$

على الكرة: $\vec{R}(u,v) = \cos v \sin u\vec{i} + \cos v \cos u\vec{j} + \cos u\vec{k}$

تقطع خطوط الطول (المنحنيات ذات الوسيط u) وتصنع زاوية ثابتة $\frac{\pi}{4}$

١٢) ادرس نقاط السطح:

$$x = u\,, y = v\,, z = u^2 + v^2$$

من حيث كونها نقاط ناقصية ،زائدية ،مكافئية .

١٣) أثبت أن زاوية تقاطع المنحنيين الإحداثيين $(u = u_0, v = v_0)$ على السطح:

$$x = u\,, y = v\,, z = au\,v$$

تعطى بـ: $$\cos\theta = \frac{a^2 u_0 v_0}{\sqrt{1+a^2u_0^2}\sqrt{1+a^2v_0^2}}$$

١٤) أوجد مساحة مقطع المستوي $y = z$ الواقع داخل الأسطوانة:

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

١٥) أوجد مساحة السطح المعطى بالمعادلة:

$$\vec{R}(u,v) = (u\cos v)\vec{i} + (u\sin v)\vec{j} + (1-u^2)\vec{k} \quad , u \geq 0\,,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

١٦) أوجد مساحة السطح المعطى بالمعادلة:

$$\vec{R}(u,v)=u^2\bar{i}+v^2\bar{j}+\sqrt{2}u\bar{k}$$

حيث $0\le u\le\sqrt{a}$, $0\le v<\sqrt{b}$.

١٧) أوجد مساحة مقطع السطح $x^2+y^2=z^2$ الناتج عن تقاطعه مع السطح $y^2+z^2=a^2$.

١٨) أوجد مساحة مقطع سطح المخروط $x^2+y^2=z^2$ $(z\ge 0)$ المقطوع بالمستوي $2z=y+1$.

١٩) بفرض الكرة $x^2+y^2+z^2=4a^2$ والقطع المكافئ:

$$(a>0)\quad x^2+y^2=a(z+a)$$

والمطلوب:

أ) أوجد مساحة سطح الكرة الواقع داخل القطع المكافئ.

ب) أوجد مساحة سطح القطع المكافئ الواقع داخل الكرة.